Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

КРИТЕРИЙ ДИСКРЕТНОСТИ СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 31 XII 1951)

В работе рассматриваются уравнения вида

$$-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\right)+q(x_1,\ldots,x_n)\psi=\lambda\psi. \tag{1}$$

Уравнение задано во всем пространстве, а функция q предполагается ограниченной снизу. Для таких уравнений найдены необходимые и достаточные условия дискретности спектра.

Эти условия формулируются особенно просто для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

Уравнение

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+q\psi=\lambda\psi, \tag{2}$$

заданное на всей прямой $-\infty<x<+\infty$, *имеет дискретный спектр в том и только в том случае, если*

$$\int\limits_N^{N+\delta} q(x)\,dx\to+\infty \tag{3}$$

при $N\to+\infty$ *или* $N\to-\infty$ *и для любого фиксированного* $\delta>0$; *функция* q *предполагается ограниченной снизу.*

Уравнения в частных производных существенно отличаются, с точки зрения условий дискретности спектра, от обыкновенных уравнений. Так же как и в одномерном случае, для недискретности спектра достаточно существования счетной последовательности одинаковых непересекающихся кубов D_m таких, что $\int\limits_{D_m} q\,dv<K$. Но, в отличие от одномерного, в n-мерном случае можно на каждом D_m выделить такое множество F_m, что при произвольном изменении $q(x_1,\ldots,x_n)$ на этих множествах спектр останется недискретным, а изменяя q надлежащим образом можно добиться выполнения условия, аналогичного условию (3).

Множества F_m должны быть несущественными вырезами кубов D_m в следующем смысле. Множество F, расположенное в кубе D, называется несущественным вырезом этого куба, если емкость F достаточно мала по сравнению с емкостью D, $C(F)\leqslant D^{n-2}/(4n)^{4n}$. Введение этого понятия позволяет сформулировать критерий дискретности спектра.

Для того чтобы уравнение (1) *имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы интеграл функции* q *по кубу* D *с лю-*

бым несущественным вырезом F неограниченно возрастал, когда куб D, сохраняя размер, уходит на бесконечность, а вырез F как угодно изменяется:

$$\int\limits_{D-F} q(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \to +\infty. \tag{4}$$

Методика исследования, развитая для уравнения (1), непосредственно переносится на уравнения типа

$$-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}\right) = \lambda\psi, \tag{5}$$

заданные в области G, с граничными условиями $\psi = 0$ на границе области G. В работе найдены необходимые и достаточные условия дискретности спектра уравнения (5).

Так как, однако, формулировка сильно выигрывает в наглядности, если говорить об условиях недискретности спектра, то здесь будут приведены именно эти условия.

Для того чтобы уравнение (5) *имело недискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы область G, в которой оно задано, содержала счетную последовательность одинаковых кубов с несущественными вырезами.*

В двух важных частных случаях теорему можно усилить.

Если граница области G имеет ограниченную кривизну, то спектр уравнения (5) *недискретен тогда и только тогда, когда область G содержит счетное число одинаковых непересекающихся кубов.*

Эта теорема справедлива для пространства любого числа измерений. Для плоскости возможно усиление основной теоремы в несколько ином направлении.

Если уравнение (5) *задано в двумерной области G, дополнение к которой односвязно, то для недискретности спектра необходимо и достаточно, чтобы область G содержала счетное число одинаковых непересекающихся квадратов.*

В заключение в работе доказывается критерий дискретности спектра для разностного аналога дифференциального уравнения. В то время как обычно теоремы для разностных уравнений оказываются значительно сложнее соответствующих теорем для дифференциальных уравнений, критерий дискретности спектра разностного уравнения формулируется неожиданно просто:

Для того чтобы разностное уравнение:

$$-\sum_{k=1}^{n} [\psi(i_1, \ldots, i_k + 1, \ldots, i_n) - 2\psi(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n) +$$
$$+ \psi(i_1, \ldots, i_k - 1, \ldots, i_n)] + q(i_1, \ldots, i_n)\psi(i_1, \ldots, i_n) = \lambda\psi(i_1, \ldots, i_n)$$

имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы $q(i_1, \ldots, i_n) \to +\infty$, когда $|i_1| + \ldots + |i_n| \to +\infty$.

Этот результат наиболее отчетливо вскрывает основную причину дискретности спектра — причину, которая в дифференциальных уравнениях маскируется тонкостями поведения коэффициента $q(x_1, \ldots, x_n)$ на несущественных множествах.

Автор считает своим долгом принести глубокую благодарность проф. И. М. Гельфанду за руководство работой.

Поступило
23 XII 1951